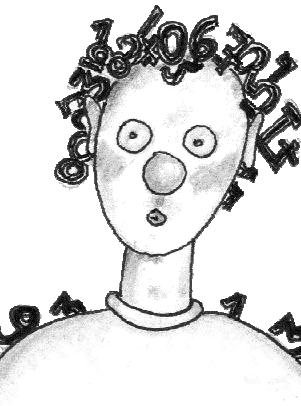


## 2. Le abilità numeriche



Claudia Cappa, ISAC-CNR  
Carlo Muzio, Università di Pavia

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

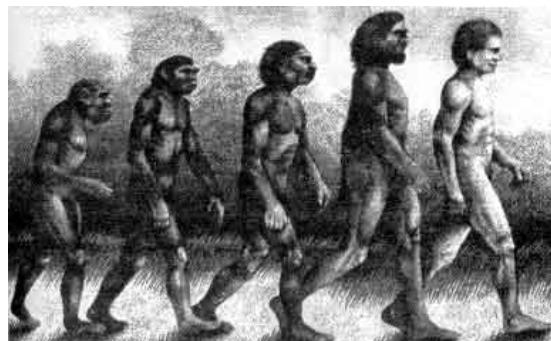
La conoscenza del numero è  
innata o appresa?



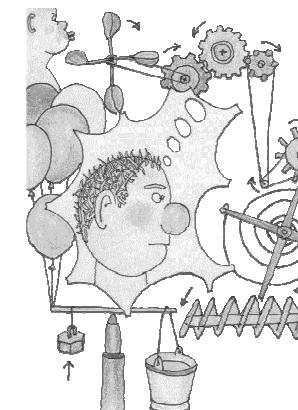
Ha 1 giorno... e sa già contare

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

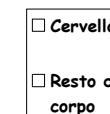
Come hanno fatto i nostri  
antenati ad acquisire il  
pensiero matematico?



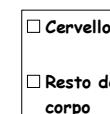
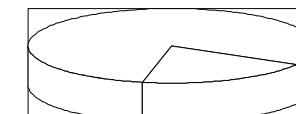
Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR



Rapporto dimensioni



Rapporto energia consumata



Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

## Quali sono i requisiti di una mente matematica?



## Tobias Dantzig (1954)

L'uomo, anche negli stadi più primitivi della sua evoluzione, possiede una facoltà che, in mancanza di un termine migliore, chiameremo **senso del numero**. Questa facoltà gli permette di accorgersi che qualcosa è cambiato in una piccola collezione di oggetti se, a sua insaputa, viene aggiunto o tolto uno di questi.

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

## Senso del numero

- Innato
- Molti animali hanno capacità simili
- Indipendente dal linguaggio, anche se esiste una connessione



Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

## Senso del numero

Condividiamo il senso del numero con scimpanzè, ratti, leoni e piccioni

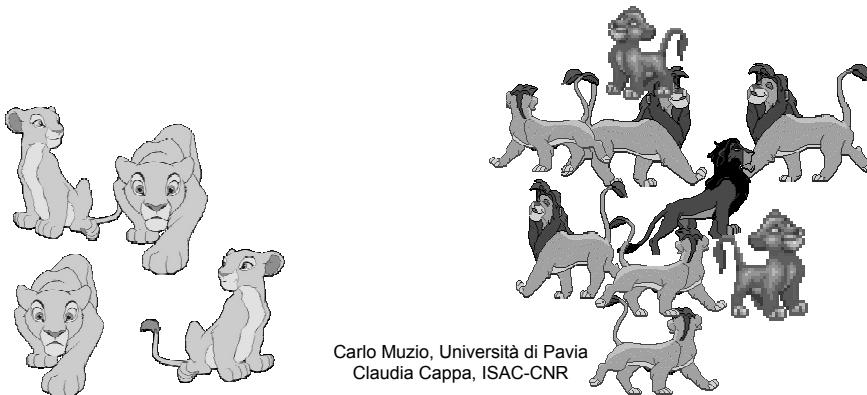


Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

# Karen McComb

Senso del numero

Ai fini stessi della sopravvivenza, conta molto sapere se un altro, minaccioso, gruppo sia più o meno *numeroso* del loro.



Senso del numero

Alcuni animali sono in grado di effettuare un certo tipo di aritmetica



Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

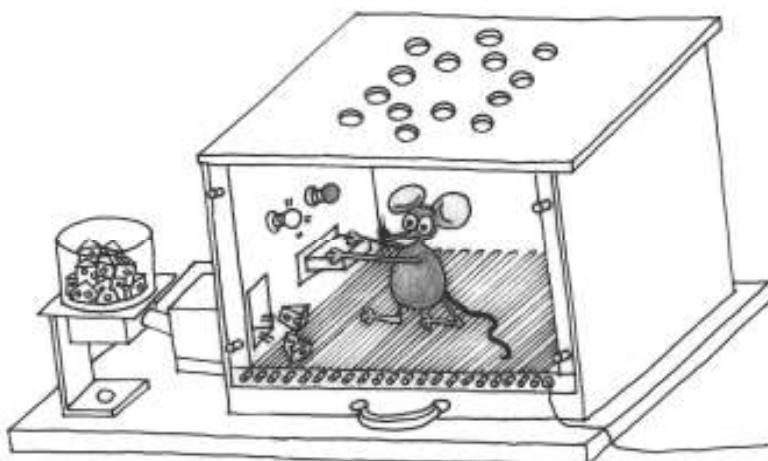
Senso del numero

Non impararono mai a premere la leva A esattamente 4 volte.

ma approssimativamente



SOVRASTIMARE



Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

Senso del numero

## Scimpanzè Ali



Tetsuro Matsuzawa (anni '80), insegnò a uno scimpanzé di nome Ali ad usare correttamente i numeri arabi da 0 a 9.

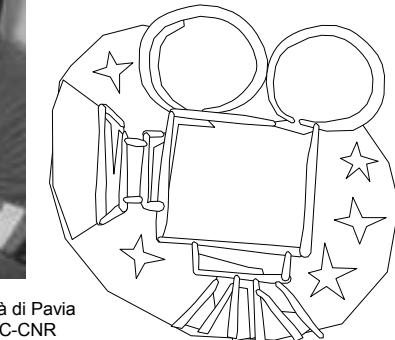


C

Senso del numero

## Ali imparò ad associare

quantità  $\leftrightarrow$  simbolo  $\leftrightarrow$  numero



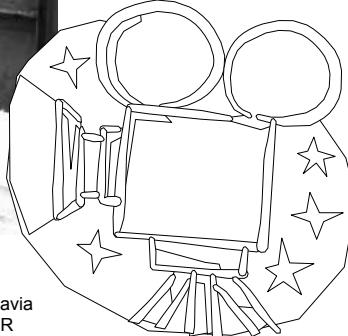
Precisione del 95%  
Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

Senso del numero

## Ali imparò ad ordinare i numeri



Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

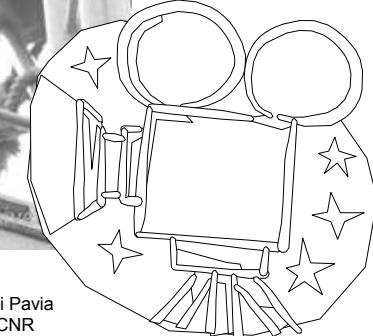


Senso del numero

## Spam di memoria



Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR





Senso del numero

Insegnare agli animali il legame tra simbolo astratto (numero) e insieme di oggetti è assai lungo e difficile.

La loro prestazione non è mai perfetta ed è comunque limitata ad insiemi molto piccoli.

I bambini invece impiegano pochi mesi a capire i numeri e sono molto precisi.



Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

Senso del numero

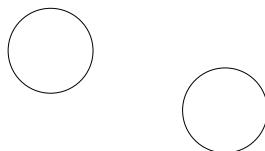
# neonati



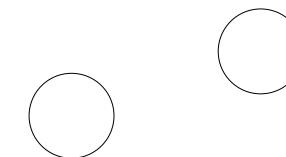
Bambini tra i 16 e i 30 giorni.  
Tecnica dell'abituazione/disabituazione

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

Senso del numero

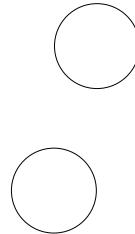


Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR



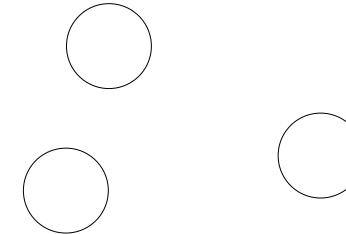
Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

Senso del numero



Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

Senso del numero



Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

## Ma i neonati sanno fare le addizioni?



Karen Wynn (1992)  
ha dimostrato che i bambini piccoli (5-6 mesi) sanno che:

$$1+1=2$$

$$3-1=2$$

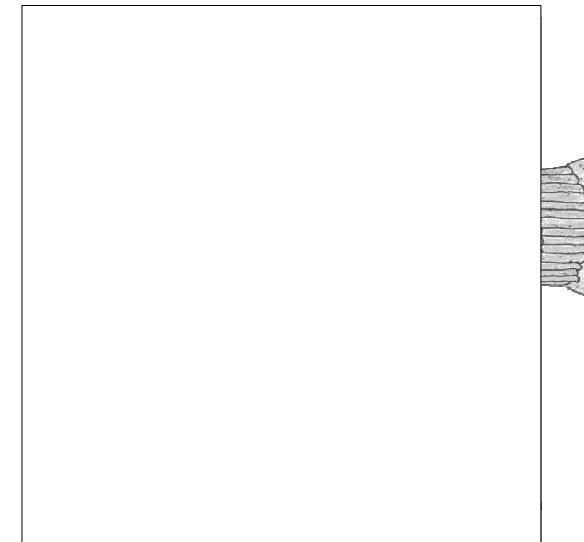
...

cioè sanno fare l'addizione e la sottrazione per i numeri 1,2,3

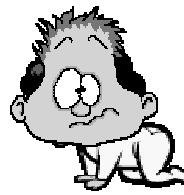


Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

Senso del numero



Senso del numero



Senso del numero

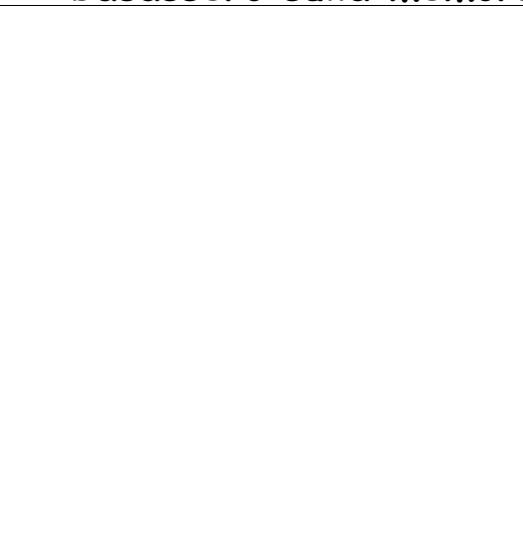
Con metodi analoghi è stato dimostrato che anche neonati di 2 giorni hanno il senso del numero e conoscono l'aritmetica per i numeri 1, 2, 3.



Carlo Muzio, Università di  
Claudia Cappa, ISAC-C

Senso del numero

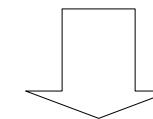
Esperimento per escludere che i bambini si basassero sulla memoria visiva



Senso del numero

Il numero è più significativo della forma

Lo ha dimostrato Tony Simon inizio degli anni '90



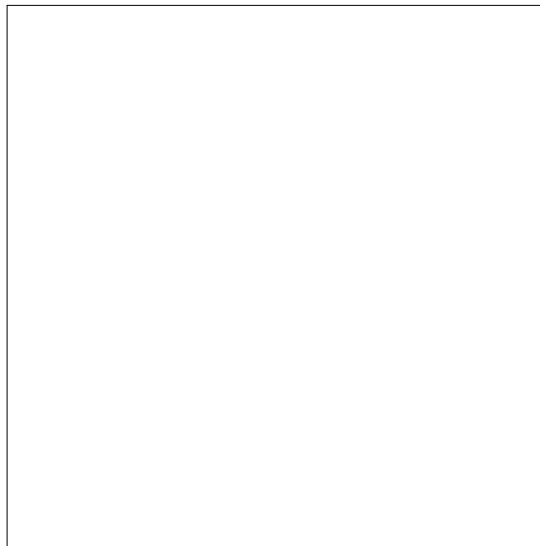
variante  
dell'esperimento  
di Wynn



Carlo Muzio,  
Claudia Cappa, ISAC-C

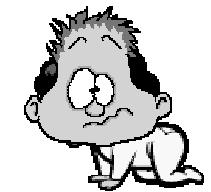
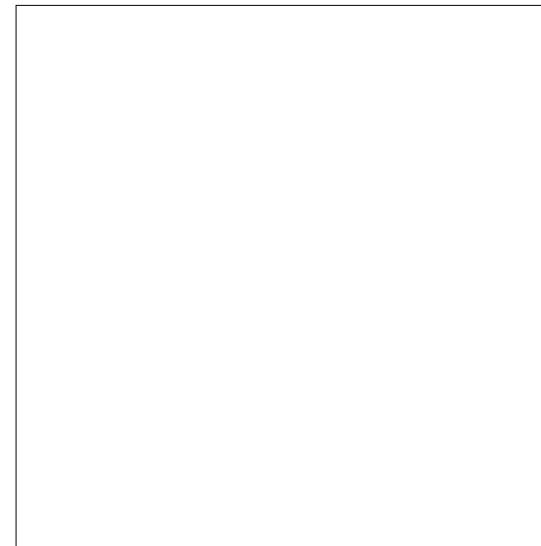
Senso del numero

Se gli oggetti cambiavano ma il numero rimaneva lo stesso  
il bambino non si stupiva troppo.



Senso del numero

Rimaneva invece sconcertato se la palla era una sola.  
L'idea che un oggetto potesse trasformarsi in un altro lo disturbava meno  
di un cambiamento di numero.



Senso del numero

Ma questa non è capacità numerica.

Verrà dimostrato che i numeri 1,  
2, 3 vengono trattati in modo diverso dai  
numeri più grandi.



Il senso del numero quindi è innato

Senso del numero



ma

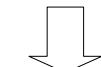
Lo si può perdere  
in seguito ad un  
trauma o ad una  
lesione



Signora Gaddi

Brian Butterworth

Si può nascere senza \*



Charles

\* si vedano i casi clinici - discalculia

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

## Capacità numerica

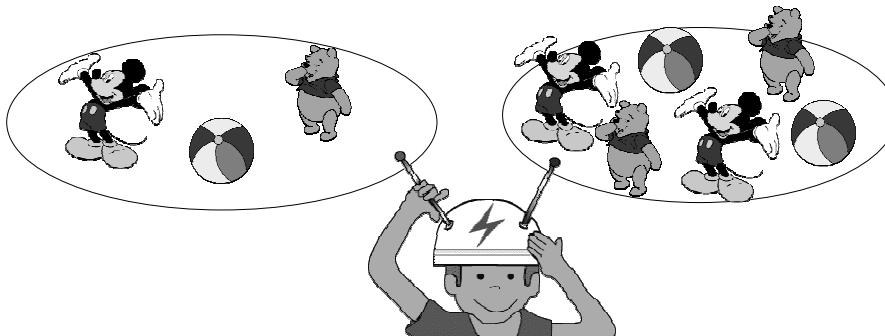
Richiede l'uso dei numeri

Abilità esclusivamente umana (tranne  
pochi casi di altri esseri viventi  
e per numeri molto piccoli).

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

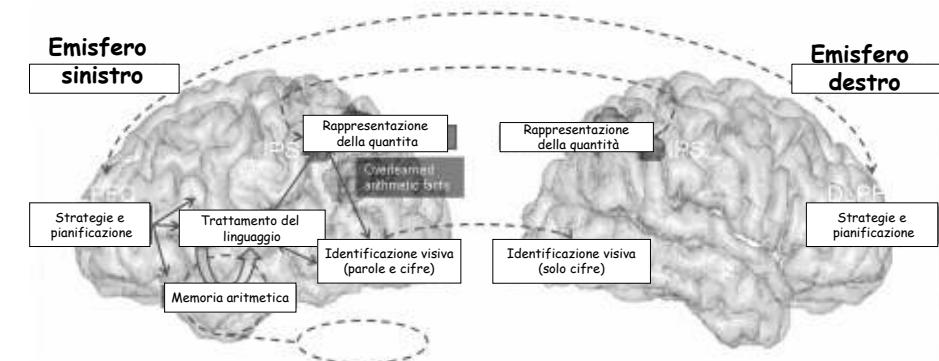
Il nostro cervello sembra trattare  
diversamente gli insiemi contenenti

Capacità numerica



Secondo Dehaene in "Il senso del numero" il  
cervello utilizza 2 meccanismi diversi.

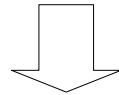
Anatomia della elaborazione dei  
numeri  
(Dehaene and Cohen)



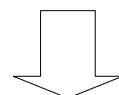
Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

Capacità numerica

subitizing = immediatizzazione



Un numero di oggetti viene determinato senza contare



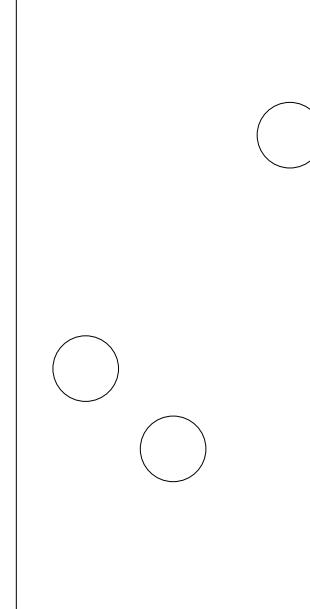
<4

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

Capacità numerica

Prova di subitizing

qui possiamo determinare il numero senza contare

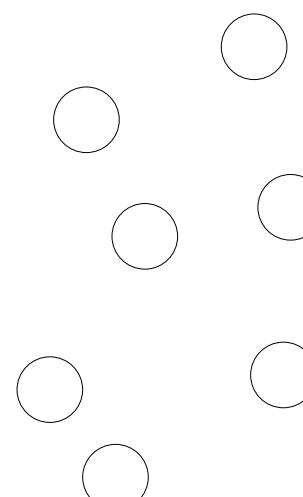


Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

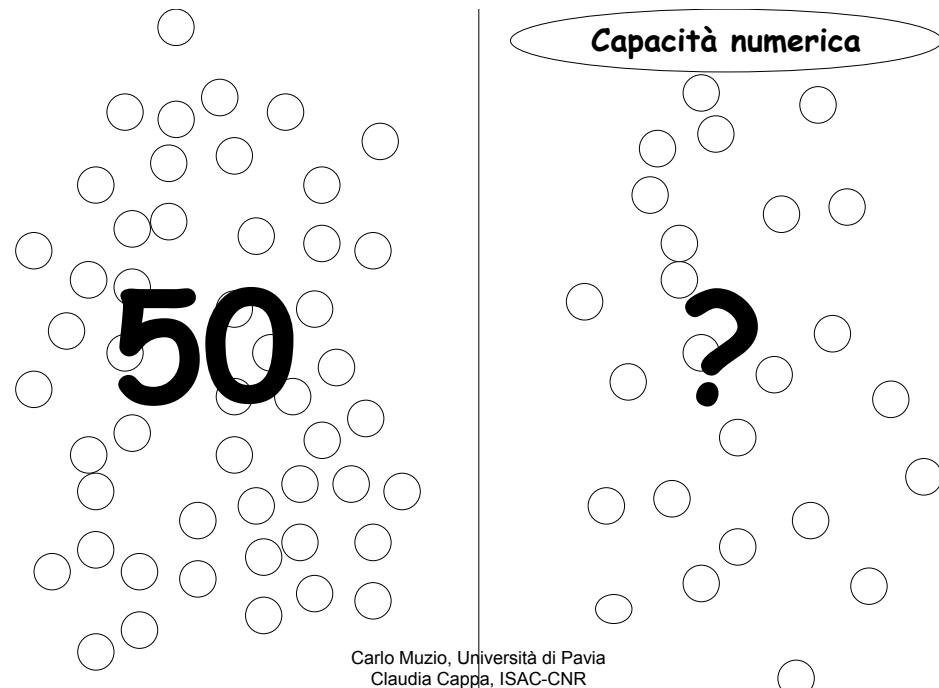
Capacità numerica

Prova di subitizing

Qui dobbiamo contare per determinare il numero esatto.  
Oppure possiamo stimare, con una buona precisione il numero



Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

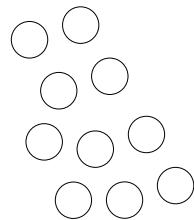


Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

Capacità numerica

?

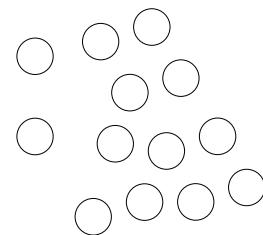
## Insieme di riferimento



10

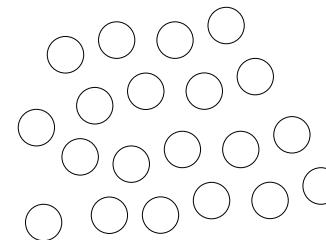
Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

Capacità numerica



13

## Insieme di riferimento



20

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

Capacità numerica

## La legge di Weber-Fechner

$$dp = k \frac{ds}{s}$$

$dp$  = variazione della percezione

$ds$  = variazione dello stimolo

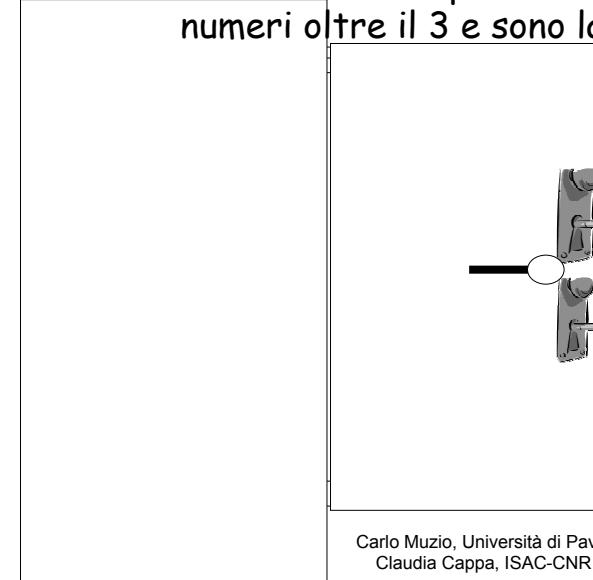
$s$  = stimolo

$k$  = parametro costante

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

Capacità numerica

Due sono le chiavi che aprono la porta sul modo dei numeri oltre il 3 e sono la capacità di:



manipolazione linguistica di essi

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

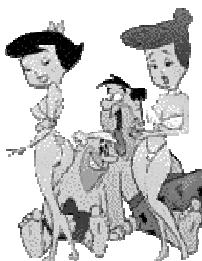
## Capacità numerica

L'ordine con il quale si procede al conteggio non ha importanza.

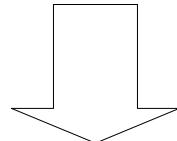
fondamentale  
intuizione, che tutti noi  
diamo per scontata

## Cultura di chi conta

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR



Probabilmente anche i nostri progenitori non contavano.



Le parole usate per denotare i primi tre numeri sono simili nel mondo e molto diverse da tutte le altre

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

## Capacità numerica

Il piccolo popolo senza numeri



Haitíhi  
(Pirahã)



non contano oltre il 2  
1, 2, molti

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

## Capacità numerica

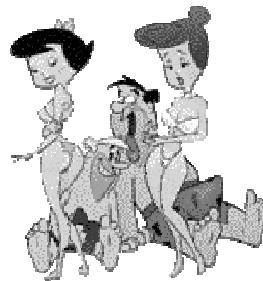
Uno, due, tre ...  
sono ancora  
uguali, in  
tantissime lingue.

Carlo Muzio, Un  
Claudia Capp

SANSKRITO	eka	dva	tri
GRECO	en	duo	tria
LATINO	unum	duo	tria
FRANCESE	un	deux	trois
RUMENO	un	doi	trei
GAELO	aon	dà	tri
GALLESE	un	dau	tri
GOTO	ains	twai	threis
INGLESE	one	two	three
SPAGNOLO	uno	dos	tres
TEDESCO	eins	zwei	drei
NORVEGESE	en	to	tre
RUSSO	odin	dva	tri

Capacità numerica

Com'è che i nostri progenitori hanno iniziato a contare oltre il 3?



Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

Capacità numerica

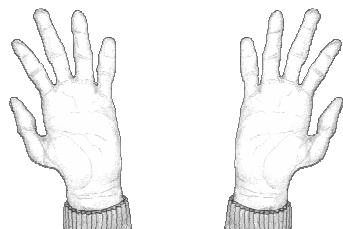
Conta come i grandi!!!!  
NON USARE LE  
DITA!!!!



Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

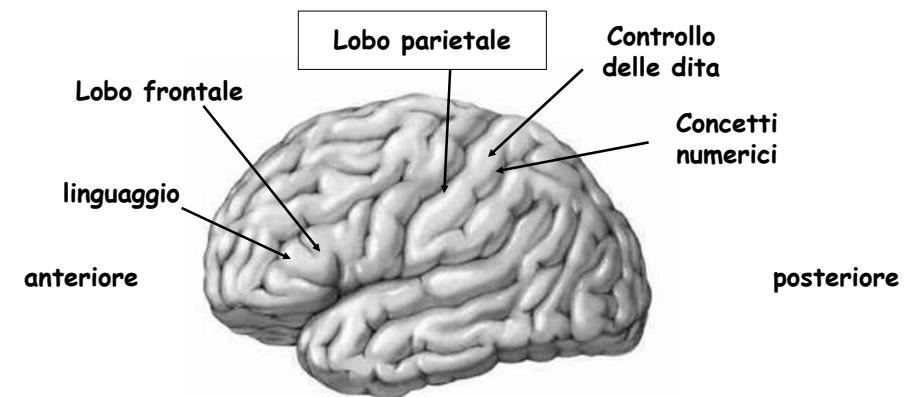
Capacità numerica

L'aritmetica cominciò con la manipolazione delle dita



sistema numerico in base 10  
parola inglese *digit* con il doppio significato di *dito* e *cifra*

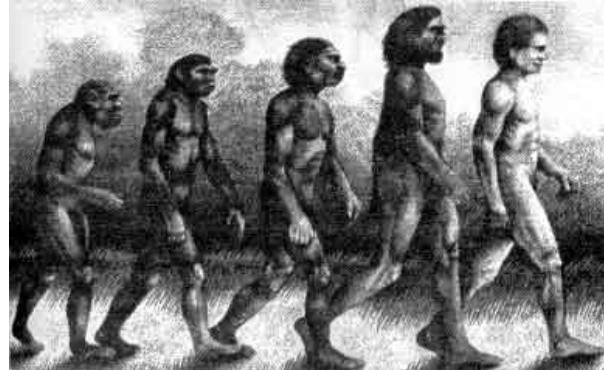
Emisfero sinistro



È una coincidenza che la parte del cervello usata per contare sia la stessa che controlla le dita?

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

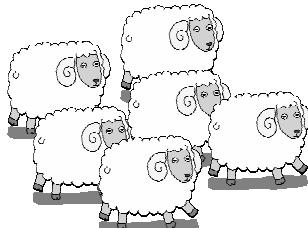
# Quale è stata l'evoluzione del pensiero matematico nei nostri antenati?



Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

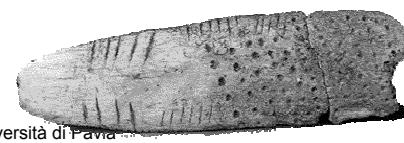
## rappresentazione simbolica

(35.000 anni fa)



Sei tacche per  
"controllare" il  
proprio gregge.

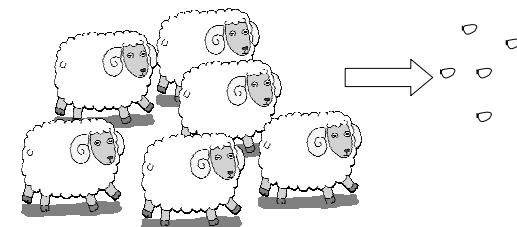
Corno di renna con incise  
delle tacche che  
probabilmente  
rappresentavano una  
quantità di oggetti.



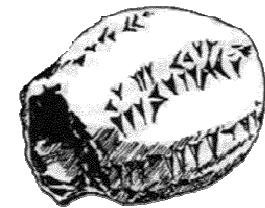
Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

## Vediamo le soluzioni trovate dai nostri avi

una collezione di oggetti equipotente

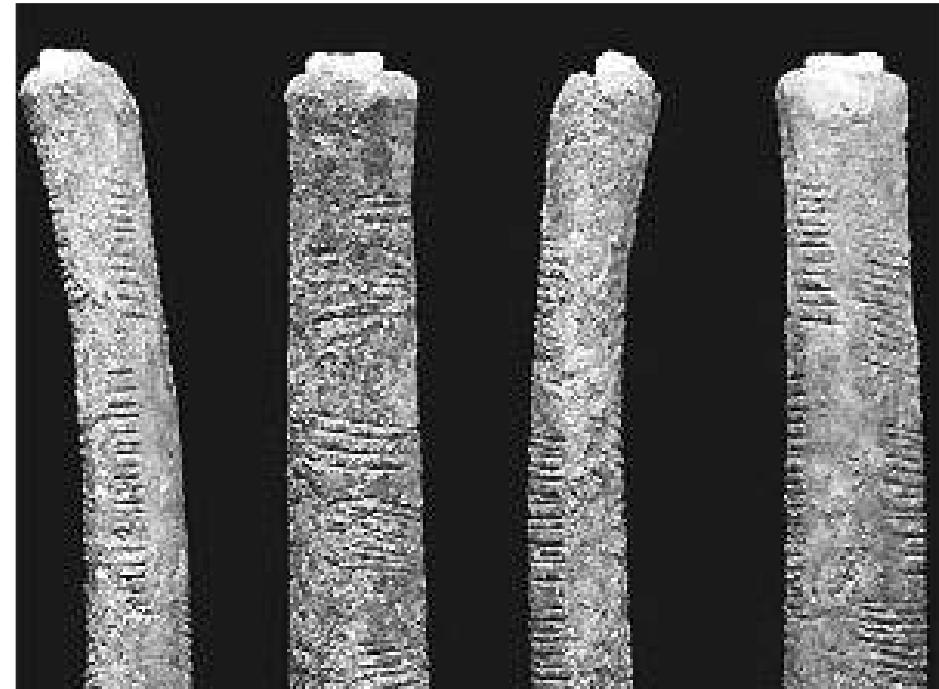


Sei sassolini per  
"controllare" il  
proprio gregge.



"Bulla" incisa trovata a Nuzi (Iraq II<sup>o</sup> millennio a.C.),  
sulla superficie sono elencati 48 animali.  
All'interno, sigillati, sono stati trovati 48 sassolini.

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR





Capacità numerica

**Ma quando e come furono acquisiti i numeri astratti per il conteggio?**



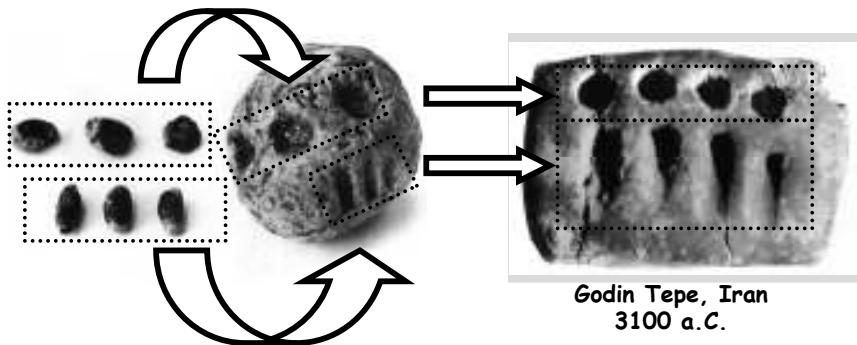
Capacità numerica

Dall'8000 a.C.

Gettoni di argilla, Mesopotamia, ca. 4000 a.C.  
Denise Schmandt-Besserat, The University of Texas at Austin.

Gettoni di argilla più complessi Iran, ca. 3300 B.C. Courtesy Musée du Louvre, Département des Antiquités Orientales, Paris.

Come nacquero i segni astratti per indicare i numeri cardinali?



"Bulla" rinvenuta a Susa in Iran (3300 a.C.) con impresso un cono grande, tre piccoli e tre dischi.

Primi segni astratti per indicare i numeri

L'uso dei segni per denotare i numeri precedette quello delle parole

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

Capacità numerica

Nelle prime civiltà (Assiri; Babilonesi...) viene utilizzata una numerazione in base 60 ma comprendente anche un simbolo per indicare la decina.

▽ ▽▽ < ≪ ▽ ≪  
1; 2 ; 10 ; 20 ; 60 ; 100



È meno comodo rispetto alla base 10

Noi usiamo ancora il sistema in base 60 per indicare i tempo e per le misure geografiche



Carlo Muzio,  
Claudia Cappa,  
ISAC-CNR

. i primi tre numeri...

## Capacità numerica

Nel regno dell'antico Egitto	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	C
Nell'impero babilonese	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	VII	X	C
Nell'impero romano	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	C
Nell'impero cinese	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	百
Presso i maya (America centrale)	.	..	...	....	-	•	••	•••	••••	=	≡
Le nostre cifre moderne	-	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1000



## Capacità numerica

Nel regno dell'antico Egitto	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	C
Nell'impero babilonese	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	VII	X	C
Nell'impero romano	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	C
Nell'impero cinese	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	百
Nell'impero indiano	-	=	≡	४	᳙	᳔	᳖	᳗	᳘	᳙	᳚
Presso i maya (America centrale)	.	..	...	....	-	•	··	···	····	=	፩
Le nostre cifre moderne	-	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 100



## Capacità numerica



**Scriviamoli di corsa senza  
staccare la penna dalla carta...**



Claudia Cappa, ISAC-CNR

## Capacità numerica

Nel regno dell'antico Egitto	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	C
Nell'impero babilonese	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	C
Nell'impero romano	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	C
Nell'impero cinese	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	百
Nell'impero indiano	-	=	≡	४	᳙	᳔	᳖	᳗	᳘	᳙	᳚
Presso i maya (America centrale)	.	..	...	....	-	•	··	···	····	=	፩
Le nostre cifre moderne	-	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 100



# Numeri nella mente

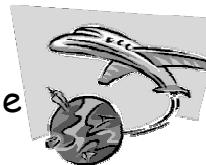


Come sono rappresentati i numeri nella nostra mente?

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

## Effetto distanza

più c'è differenza tra i numeri, più le risposte sono rapide e accurate.



Più facile → 5 e 3      di → 5 e 4

## 3 Effetto grandezza      23459

a parità di distanza le risposte rallentano con l'aumentare del valore dei numeri.

Più facile → 5 e 13      di → 65 e 64



## legge psicofisica di Weber-Fechner

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

# Quale è il numero grande?

2 e 3

5 e 4

3 e 9

25 e 24

1 e 50

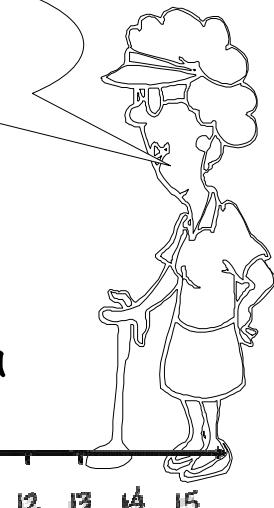
## Effetto distanza

## Effetto grandezza

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

## linea numerica mentale

Quale numero è intermedio tra l'1 e il 9?



- L'orientamento dipende dall'orientamento della lettura
- Sembra essere compressa logaritmicamente

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

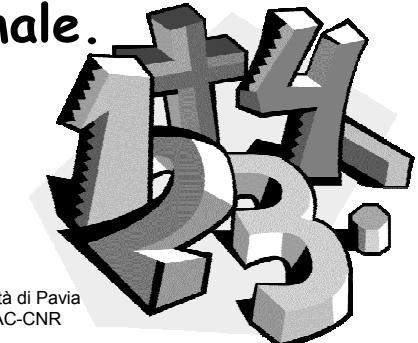
Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

**Capacità numerica**

**Butterworth**  
il sistema numerico  
arabico è un linguaggio  
ma...

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

**Il sistema numerico arabo è un linguaggio, ma gestito da una regione del cervello diversa da quella che si occupa del linguaggio normale.**



Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

**Capacità numerica**

**Dove si installano i simboli per indicare i numeri?**

Lobo frontale  
Parole che denotano i numeri  
anteriore

Lobo parietale

1, 2, 3 numeri innati

Simboli numerici  
posteriore

**Emisfero sinistro**

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

**I numeri in sé dipendono dal linguaggio**



**una persona ricorda i numeri nella lingua in cui li ha imparati**

quando parliamo una lingua straniera e sentiamo un numero, automaticamente lo traduciamo o nella nostra lingua oppure nei simboli 1, 2, 3,....

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

