

## 2. Le abilità numeriche

Claudia Cappa, ISAC-CNR  
Carlo Muzio, Università di Pavia  
Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR



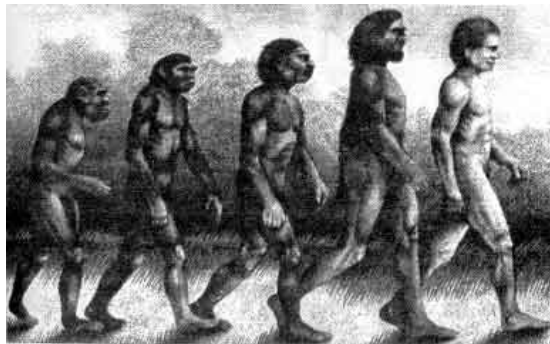
La conoscenza del numero è  
innata o appresa?



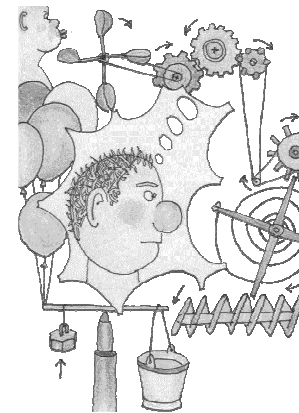
Ha 1 giorno... e sa già contare

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

Come hanno fatto i nostri  
antenati ad acquisire il  
pensiero matematico?



Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR



Rapporto tra dimensione  
e consumo di energia del  
cervello rispetto al resto  
del corpo

Rapporto dimensioni

Rapporto energia consumata



☐ Cervello  
☐ Resto del  
corpo



☐ Cervello  
☐ Resto del  
corpo

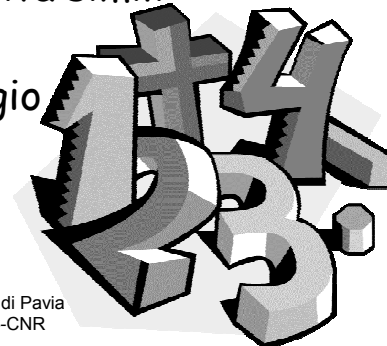
Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

## Quali sono i requisiti di una mente matematica?



## Senso del numero

- Innato
- Molti animali hanno capacità simili
- Indipendente dal linguaggio anche se esiste una connessione



Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

## Senso del numero

### Tobias Dantzig (1954)

L'uomo, anche negli stadi più primitivi della sua evoluzione, possiede una facoltà che, in mancanza di un termine migliore, chiameremo *senso del numero*. Questa facoltà gli permette di accorgersi che qualcosa è cambiato in una piccola collezione di oggetti se, a sua insaputa, viene aggiunto o tolto uno di questi.

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

## Senso del numero

Condividiamo il senso del numero con scimpanzè, ratti, leoni e piccioni

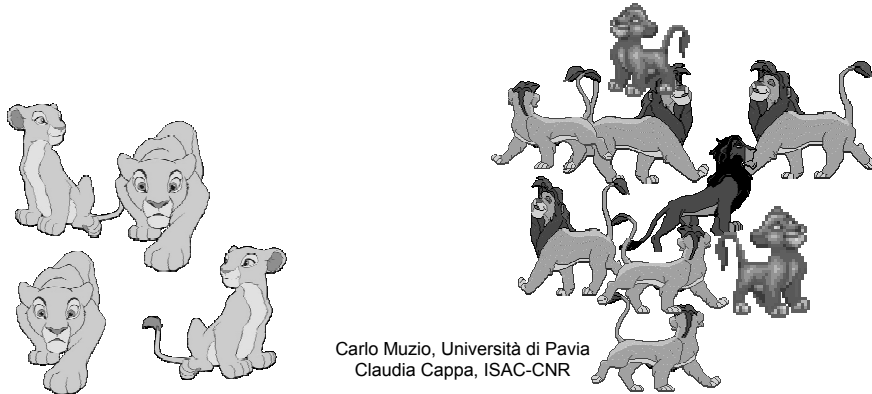


Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

# Karen McComb

Senso del numero

Ai fini stessi della sopravvivenza, conta molto sapere se un altro, minaccioso, gruppo sia più o meno *numeroso* del loro.



Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

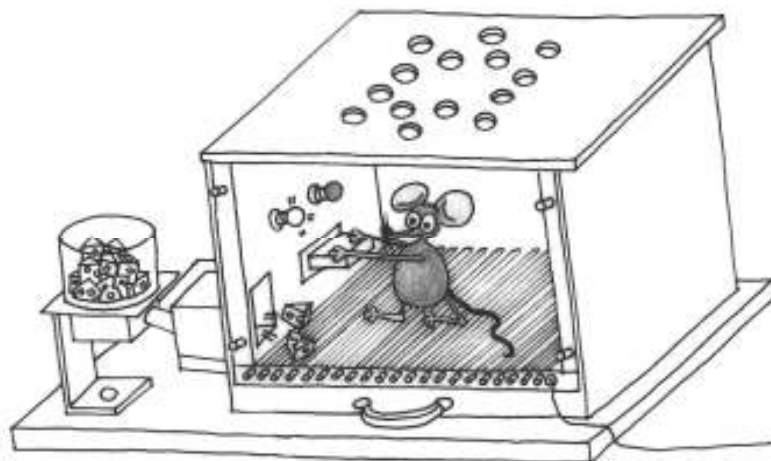
Senso del numero

Alcuni animali sono in grado di effettuare un certo tipo di aritmetica



Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

Senso del numero



Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

Senso del numero

Non impararono mai a premere la leva A esattamente 4 volte.

ma approssimativamente



**SOVRASTIMARE**

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

Senso del numero



## Scimpanzè Ali

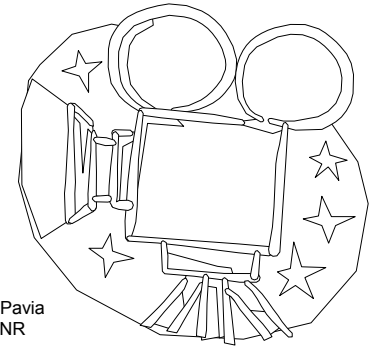
Tetsuro Matsuzawa (anni '80), insegnò a uno scimpanzé di nome Ali ad usare correttamente i numeri arabi da 0 a 9.



Senso del numero

Ali imparò ad associare

quantità  $\leftrightarrow$  simbolo  $\Rightarrow$  numero

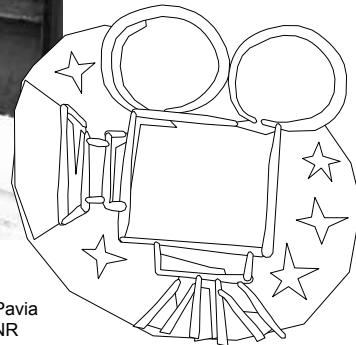


Precisione del 95%

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

Senso del numero

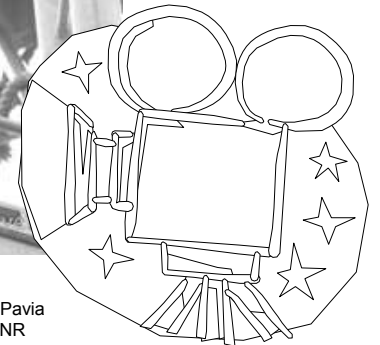
## Ali imparò ad ordinare i numeri



Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

Senso del numero

## Spam di memoria



Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR



**Insegnare agli animali il legame tra simbolo astratto (numero) e insieme di oggetti è assai lungo e difficile.**

La loro prestazione non è mai perfetta ed è comunque limitata ad insiemi molto piccoli.

**I bambini invece impiegano pochi mesi a capire i numeri e sono molto precisi.**



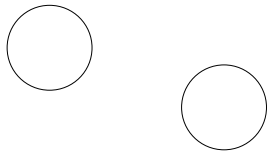
Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

# neonati

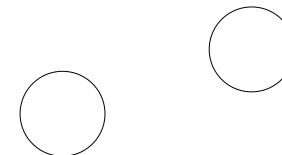


**Bambini tra i 16 e i 30 giorni.  
Tecnica dell'abituazione/disabituazione**

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

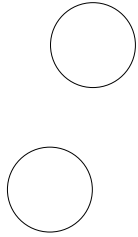


Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR



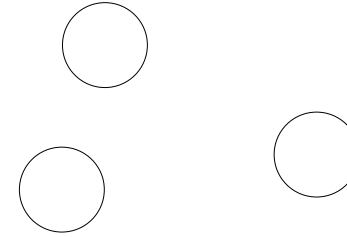
Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

Senso del numero



Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

Senso del numero



Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

Senso del numero

## Ma i neonati sanno fare le addizioni?



Karen Wynn (1992)  
ha dimostrato che i bambini  
piccoli (5-6 mesi) sanno che:

$$1+1=2$$

$$3-1=2$$

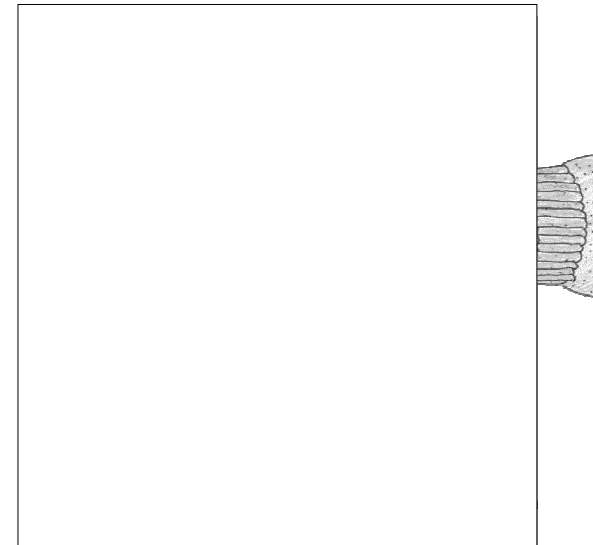
...

cioè sanno fare  
l'addizione e la sottrazione  
per i numeri 1,2,3

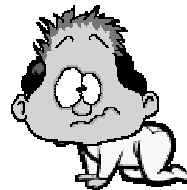
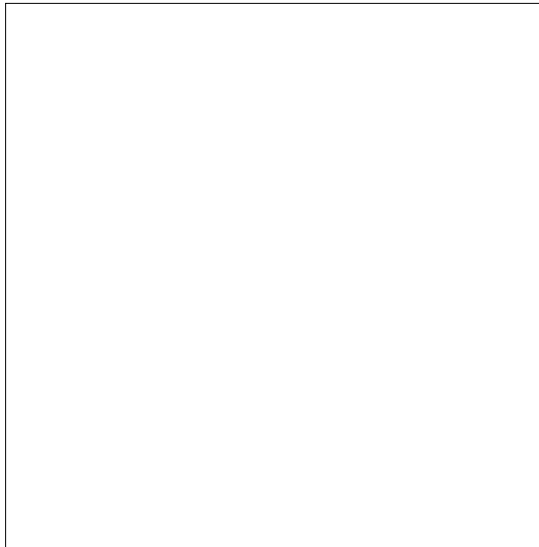
Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR



Senso del numero



Senso del numero



Senso del numero

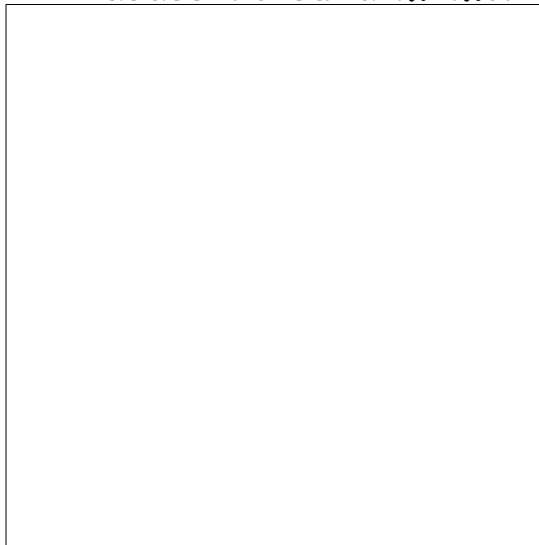
**Con metodi analoghi è stato dimostrato che anche neonati di 2 giorni hanno il senso del numero e conoscono l'aritmetica per i numeri 1,2,3.**



Carlo Muzio, Università di  
Claudia Cappa, ISAC-C

Senso del numero

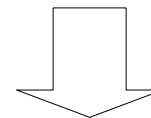
**Esperimento per escludere che i bambini si basassero sulla memoria visiva**



Senso del numero

**Il numero è più significativo della forma**

Lo ha dimostrato Tony Simon inizio degli anni '90



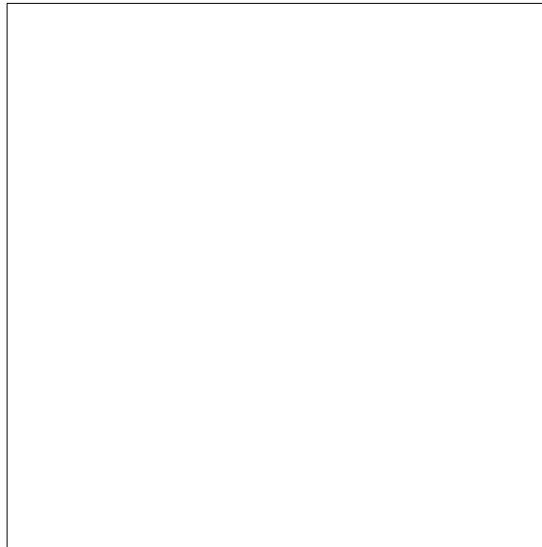
variante  
dell'esperimento  
di Wynn

Carlo M  
Claudia



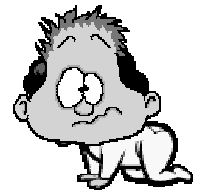
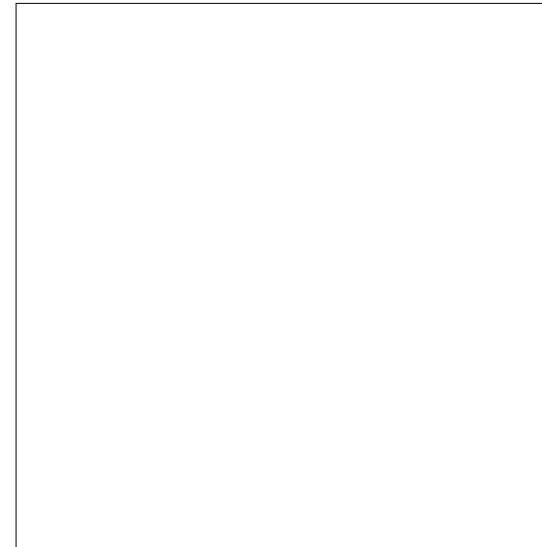
Senso del numero

Se gli oggetti cambiavano ma il numero rimaneva lo stesso  
il bambino non si stupiva troppo.



Senso del numero

Rimaneva invece sconcertato se la palla era una sola.  
L'idea che un oggetto potesse trasformarsi in un altro lo disturbava meno  
di un cambiamento di numero.



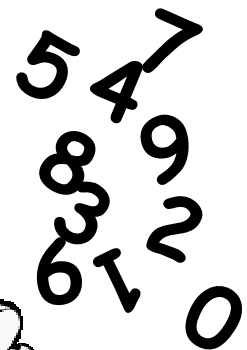
Senso del numero

Ma questa non è capacità numerica.

Verrà dimostrato che i numeri 1,  
2, 3 vengono trattati in modo diverso dai  
numeri più grandi.

Senso del numero

**Bambini di età inferiore all'anno  
sembrano incapaci di distinguere  
4 oggetti da 5 a 6.**





Senso del numero

**Il senso del numero quindi è innato**



Brian Butterworth

ma

Lo si può perdere  
inseguito ad un  
trauma o ad una  
lesione

Signora Gaddi

Si può nascere senza \*

Charles

\* si vedano i casi clinici - discalculia

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

## Capacità numerica

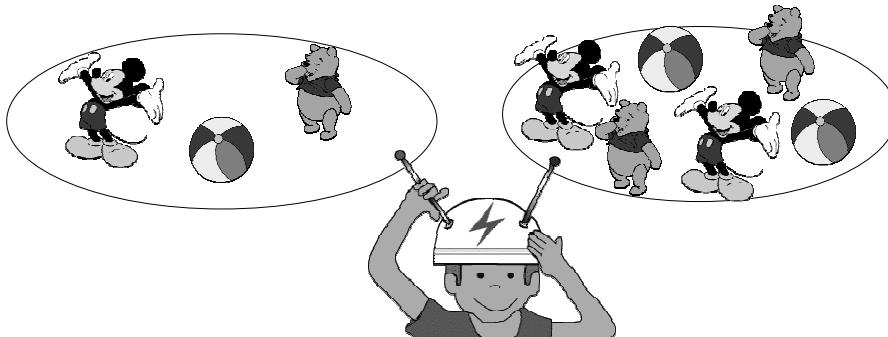
**Richiede l'uso dei numeri**

Abilità esclusivamente umana (tranne  
pochi casi di altri esseri viventi  
e per numeri molto piccoli).

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

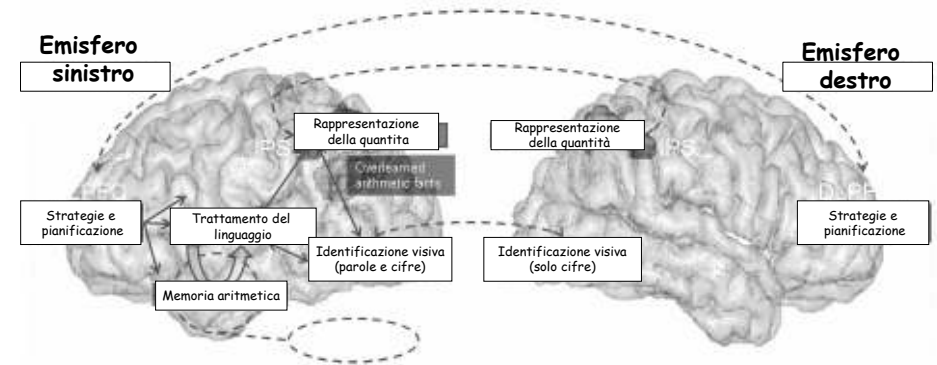
## Capacità numerica

**Il nostro cervello sembra trattare  
diversamente gli insiemi contenenti**



**Secondo Dehaene in "Il senso del numero" il  
cervello utilizza 2 meccanismi diversi.**

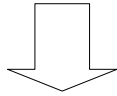
## Anatomia della elaborazione dei numeri (Dehaene and Cohen)



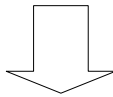
Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

Capacità numerica

subitizing = immediatizzazione



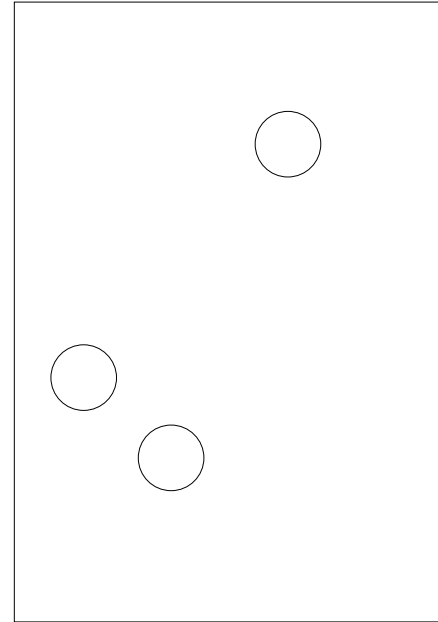
Un numero di oggetti viene  
determinato senza contare



<4

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

Capacità numerica

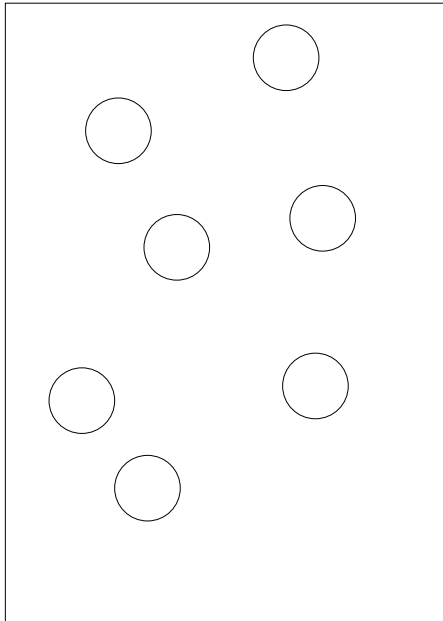


**Prova di subitizing**

qui possiamo  
determinare il  
numero senza contare

Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

Capacità numerica



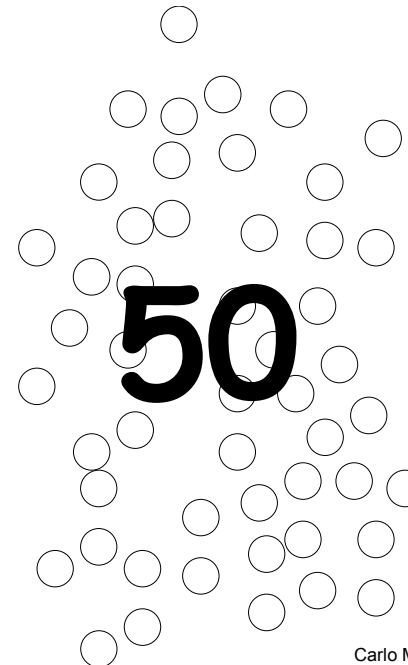
**Prova di subitizing**

Qui dobbiamo contare per  
determinare il numero  
esatto.

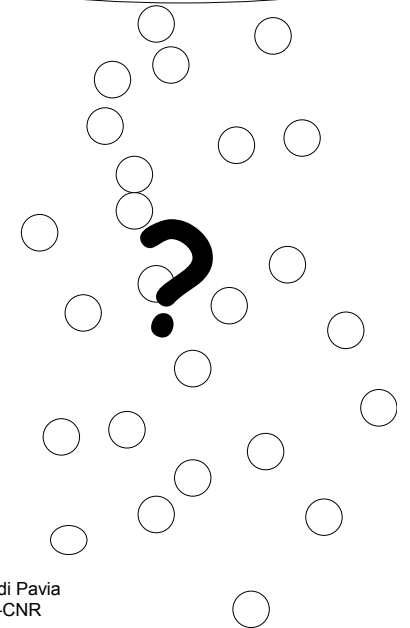
Oppure possiamo stimare,  
con una buona precisione il  
numero

Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

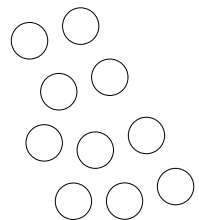
Capacità numerica



Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR



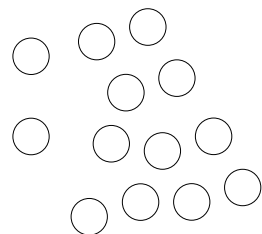
Insieme di riferimento



10

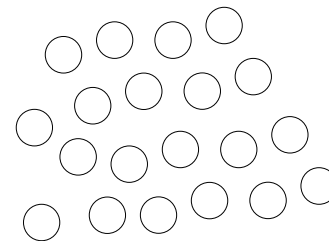
Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

Capacità numerica



13

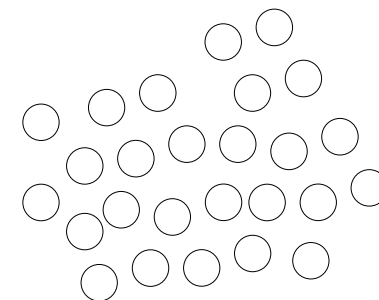
Insieme di riferimento



20

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

Capacità numerica



26

La legge di Weber-Fechner

$$dp = k \frac{ds}{s}$$

$dp$  = variazione della percezione

$ds$  = variazione dello stimolo

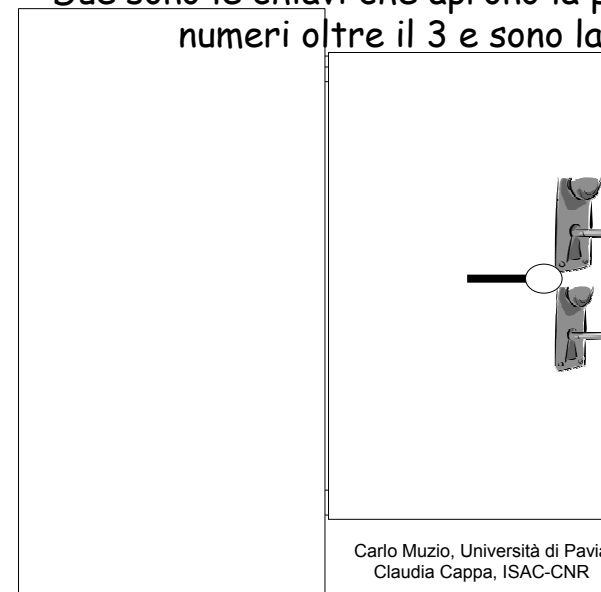
$s$  = stimolo

$k$  = parametro costante

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

Capacità numerica

Due sono le chiavi che aprono la porta sul modo dei numeri oltre il 3 e sono la capacità di:



Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

Capacità numerica

contare

utilizzare  
simboli arbitrari

manipolazione  
linguistica di  
essi

L'ordine con il quale si procede  
al conteggio non ha importanza.

fondamentale  
intuizione, che tutti noi  
diamo per scontata

Cultura di chi conta

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

## Il piccolo popolo senza numeri



*Hiaitihi*  
(Pirahã)

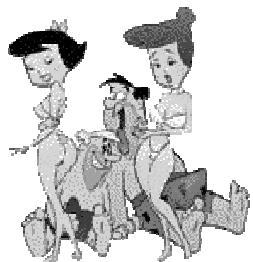
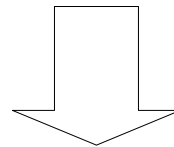


non contano oltre il 2

1, 2, molti

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

Probabilmente anche i nostri  
progenitori non contavano.



Le parole usate per  
denotare i primi tre  
numeri sono simili nel  
mondo e molto diverse da  
tutte le altre

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

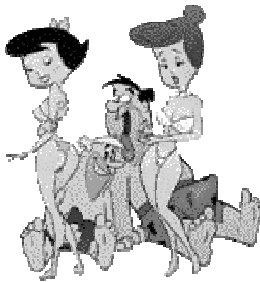
Uno, due, tre ...  
sono ancora  
*uguali*, in  
*tantissime lingue*.

SANSKRITO	eka	dva	tri
GRECO	en	duo	tria
LATINO	unum	duo	tria
FRANCESE	un	deux	trois
RUMENO	un	doi	trei
GAELICO	aon	dà	tri
GALLESE	un	dau	tri
GOTO	ains	twai	threis
INGLESE	one	two	three
SPAGNOLO	uno	dos	tres
TEDESCO	eins	zwei	drei
NORVEGESE	en	to	tre
RUSSO	odin	dva	tri

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

Capacità numerica

Com'è che i nostri progenitori hanno iniziato a contare oltre il 3?



Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

Capacità numerica

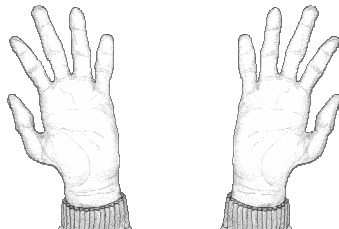
Conta come i grandi!!!!  
NON USARE LE  
DITA!!!!



Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

Capacità numerica

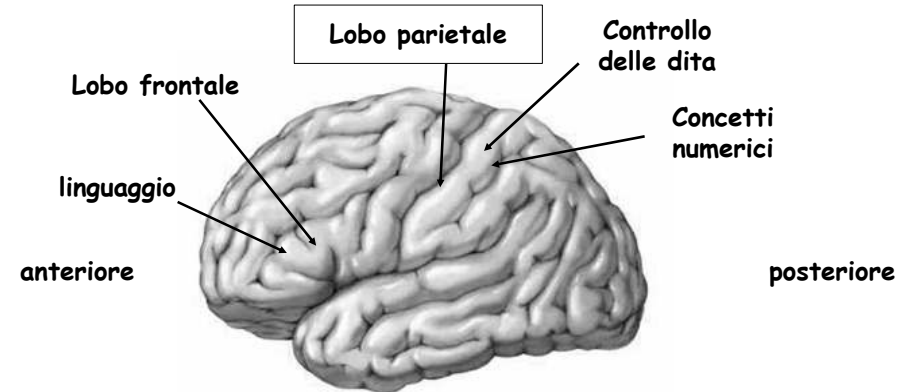
L'aritmetica cominciò con la manipolazione delle dita



sistema numerico in base 10  
parola inglese *digit* con il doppio  
significato di *dito* e *cifra*

Capacità numerica

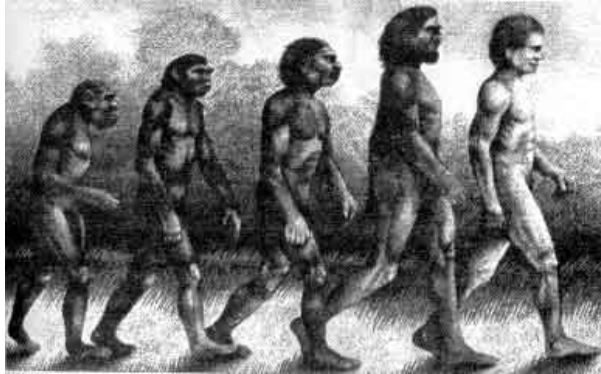
Emisfero sinistro



È una coincidenza che la parte del cervello  
usata per contare sia la stessa che controlla le  
dita?

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

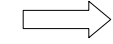
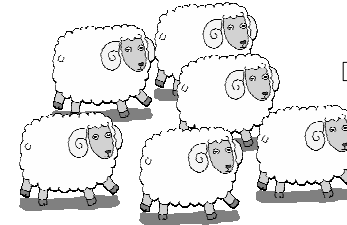
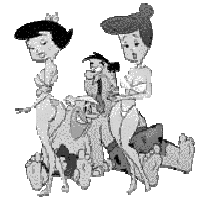
# Quale è stata l'evoluzione del pensiero matematico nei nostri antenati?



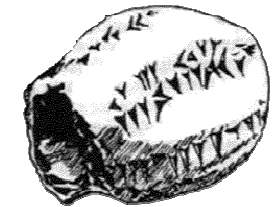
Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

## Vediamo le soluzioni trovate dai nostri avi

una collezione di oggetti **equipotente**



Sei sassolini per "controllare" il proprio gregge.

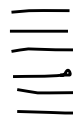
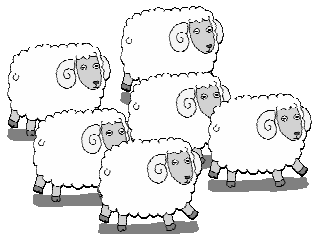


"Bulla" incisa trovata a Nuzi (Iraq II° millennio a.C.), sulla superficie sono elencati 48 animali. All'interno, sigillati, sono stati trovati 48 sassolini.

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

### Capacità numerica

#### rappresentazione simbolica (35.000 anni fa)

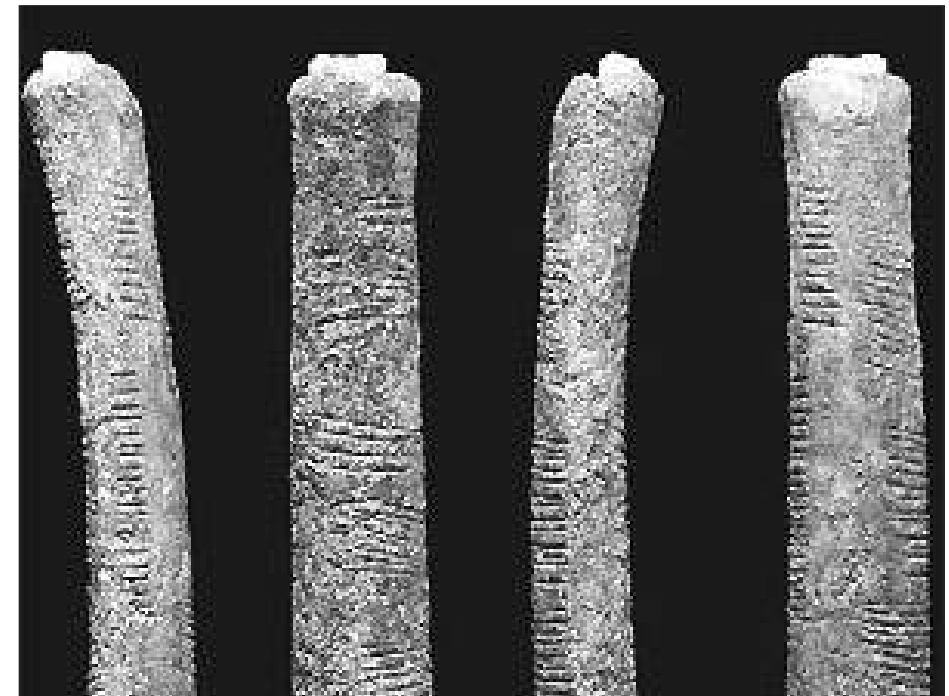


Sei tacche per "controllare" il proprio gregge.

Corno di renna con incise delle tacche che probabilmente rappresentavano una quantità di oggetti.



Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR



Capacità numerica

Ma quando e come furono acquisiti i numeri astratti per il conteggio?

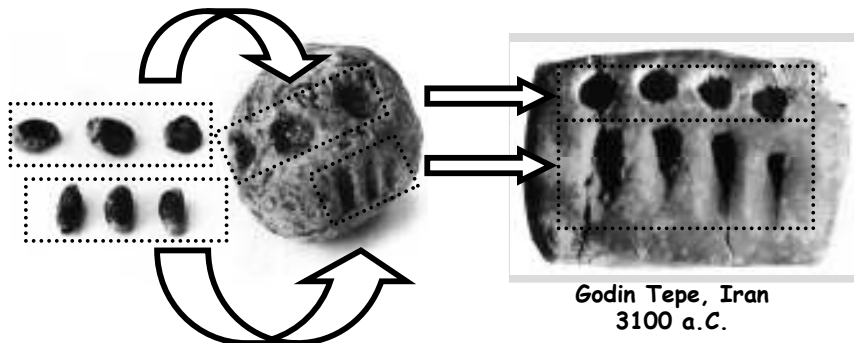
Capacità numerica

Dall'8000 a.C.

Gettoni di argilla, Mesopotamia, ca. 4000 a.C.  
Denise Schmandt-Besserat, The University of Texas at Austin.

Gettoni di argilla più complessi Iran, ca. 3300 B.C. Courtesy  
Musée du Louvre, Département des Antiquités Orientales, Paris.

Come nacquero i segni astratti per indicare i numeri cardinali?



"Bulla" rinvenuta a Susa in Iran (3300 a.C.) con impressi un cono grande, tre piccoli e tre dischi.

Godin Tepe, Iran  
3100 a.C.

Primi segni astratti per indicare i numeri

L'uso dei segni per denotare i numeri precedette quello delle parole

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

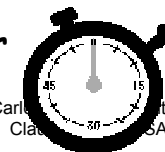
Capacità numerica

Nelle prime civiltà (Assiri; Babilonesi...) viene utilizzata una numerazione in base 60 ma comprendente anche un simbolo per indicare la decina.

▽ ▽ ▽ ... < ... << ... ▽ ... ▽<<  
1; 2 ; 10 ; 20 ; 60 ; 100

È meno comodo rispetto alla base 10

Noi usiamo ancora il sistema in base 60 per indicare i tempo e per le misure geografiche



Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR



## Capacità numerica



## Capacità numerica

## Capacità numerica



## Capacità numerica





# Numeri nella mente



Come sono rappresentati i numeri nella nostra mente?

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

# Quale è il numero più grande?

2 e 3

5 e 4

3 e 9

25 e 24

1 e 50

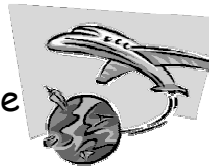
Effetto distanza

Effetto grandezza

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

## Effetto distanza

più c'è differenza tra i numeri, più le risposte sono rapide e accurate.

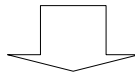


Più facile  $\Rightarrow$  5 e 3 di  $\Rightarrow$  5 e 4

**3** Effetto grandezza **23459**

a parità di distanza le risposte rallentano con l'aumentare del valore dei numeri.

Più facile  $\Rightarrow$  5 e 13 di  $\Rightarrow$  65 e 64



**legge psicofisica di Weber-Fechner**

Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

## linea numerica mentale

Quale numero è intermedio tra l'1 e il 9?

- L'orientamento dipende dall'orientamento della lettura
- Sembra essere compressa logaritmicamente



Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

## Capacità numerica

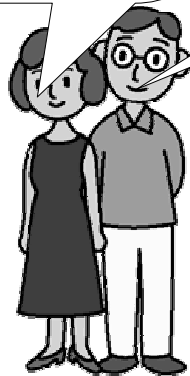
1, 2, 3 45, 479	Uno, due, tre Quaranta- cinque
--------------------	---

1, 2, 3 45, 479	Uno, due, tre, Quaranta- cinque
--------------------	--



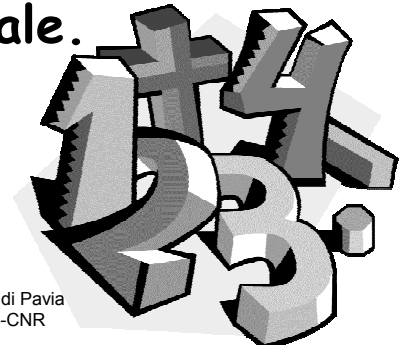
Butterworth

il sistema numerico  
arabico è un linguaggio  
ma...



Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

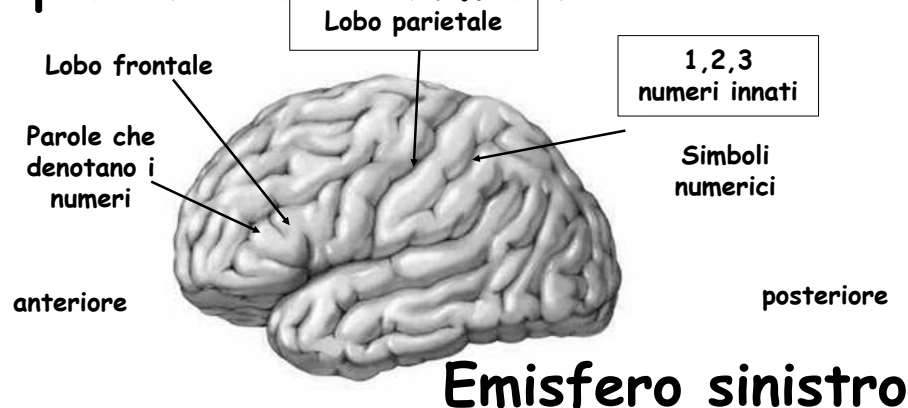
Il sistema numerico arabo è  
un linguaggio, ma gestito da  
una regione del cervello  
diversa da quella che si occupa  
del linguaggio normale.



Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

Dove si installano  
i simboli  
per indicare i numeri?

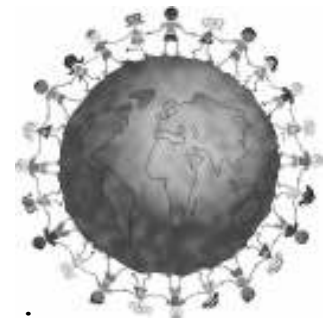
## Capacità numerica



Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR

I numeri in sé dipendono dal  
linguaggio

una persona ricorda i  
numeri nella lingua in cui  
li ha imparati



quando parliamo una lingua straniera e  
sentiamo un numero, automaticamente lo  
traduciamo o nella nostra lingua oppure nei  
simboli 1, 2, 3,....



Carlo Muzio, Università di Pavia  
Claudia Cappa, ISAC-CNR